**Descrição do Problema e da Solução**

O objetivo do problema é desenvolver um programa para distribuir o máximo possível de brinquedos de Natal por T crianças. O programa recebe N fábricas distribuídas por M países, com cada fábrica produzindo um único brinquedo com um determinado stock máximo. Cada criança recebe apenas um brinquedo desejado. Cada país tem um mínimo de prendas distribuídas e um máximo de prendas que podem ser exportadas.

A solução passa por criar dois conjuntos de variáveis:

1. O primeiro conjunto representa o número de crianças de cada país que irá receber uma prenda, ligando, assim, os países às crianças lá residentes.
2. O segundo conjunto denota o número de brinquedos que cada criança recebe, ligando, assim, as crianças às fábricas que produzem os brinquedos que cada uma deseja.

Ambos os conjuntos são binários, pois têm peso 0 ou 1. Além disso, temos de colocar a função objetivo que é maximizar o número de crianças que irá receber uma prenda. Temos ainda de modelar as restrições do nosso problema:

1. O número de prendas que uma criança de um país recebe é igual ao número de prendas fornecidas pelas fábricas desejadas por esta criança.
2. O número de prendas fornecidas por uma fábrica tem de ser menor que o seu stock.
3. A soma das prendas dadas por fábricas de um país a crianças de outros países não pode ultrapassar o limite de exportação desse país.
4. Cada país tem de receber um determinado mínimo de prendas.

**Análise Teórica**

* **Leitura dos dados de entrada e processamento dos dados:** simples leitura do input, com ciclos a depender de N, de M e de T. Em cada ciclo adiciona-se dados a dicionários com a complexidade O(), com a exceção do último ciclo em que se adiciona uma lista a um dicionário, cuja complexidade no pior caso é O(). Deste modo, a complexidade final será O(). Logo, O().
* **Criação das variáveis e restrições:** para criar o conjunto de variáveis País-Criança, percorre-se um ciclo a depender de T. Assim, O(). Para criar o conjunto de variáveis Criança-Fábrica, percorre um ciclo a depender de T com outro a depender de N, assim O(). Para criar a função objetivo, percorre-se outro ciclo a depender de T, logo O(). As quatro restrições têm complexidades O(), O(), O() e O(). Logo, O().
* **Complexidade do programa linear:** tendo em conta que a complexidade do programa linear tem a fórmula \_\_\_\_, logo, O().
* **Complexidade global da solução:** deste modo, a solução tem uma complexidade global de O(), redutível a O().

**Avaliação Experimental dos Resultados**

Tendo em conta que o main() terá complexidade O(), para verificar este resultado, gerou-se testes em que se aumentava o tamanho de N em 100 instâncias de 100 até 300, para M e T constantes. Além disso, aumentava-se o M em 10 instâncias deste 10 até 30 para N e T constantes. Por fim, aumentava-se o T em 1000 instâncias deste 1000 até 3000 para N e M constantes. Deste modo, gerou-se 27 testes para comprovar a complexidade teórica calculada.

Assim, construiu-se um gráfico com a complexidade teórica dos dados no eixo XX e com o tempo correspondente para cada N, M e T no eixo YY. No entanto, ao analisar o gráfico 1, não se verifica uma relação de linearidade entre a complexidade e os tempos obtidos, pelo que se conclui que a complexidade efetiva do programa seja O(). Neste último, ao construir-se o gráfico 2, já se observa uma relação de linearidade.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | M | L | Tempo | Compl.Teórica | Compl.Efetiva |
| 10000 | 300000 | 300 | 1,16 | 3691200000 | 102000000 |
| 10000 | 600000 | 300 | 3,173 | 3782400000 | 115806180 |
| 10000 | 900000 | 300 | 6,063 | 3873600000 | 130294091,3 |
| 20000 | 300000 | 300 | 1,064 | 7833144301 | 192000000 |
| 20000 | 600000 | 300 | 2,62 | 7924434610 | 204000000 |
| 20000 | 900000 | 300 | 4,663 | 8015724919 | 205806180 |
| 30000 | 300000 | 300 | 1,028 | 12179570524 | 220294091,3 |
| 30000 | 600000 | 300 | 2,414 | 12270913660 | 231612359,9 |
| 30000 | 900000 | 300 | 4,105 | 12362256797 | 260588182,6 |
| 10000 | 300000 | 600 | 1,85 | 14581200000 | 282000000 |
| 10000 | 600000 | 600 | 4,601 | 14762400000 | 295806180 |
| 10000 | 900000 | 600 | 8,545 | 14943600000 | 306000000 |
| 20000 | 300000 | 600 | 1,818 | 31148706278 | 310294091,3 |
| 20000 | 600000 | 600 | 4,289 | 31329996587 | 347418539,9 |
| 20000 | 900000 | 600 | 7,165 | 31511286896 | 384000000 |
| 10000 | 300000 | 900 | 2,455 | 32671200000 | 390882273,9 |
| 10000 | 600000 | 900 | 5,981 | 32942400000 | 411612359,9 |
| 10000 | 900000 | 900 | 10,778 | 33213600000 | 440588182,6 |
| 30000 | 300000 | 600 | 1,839 | 48534252687 | 564000000 |
| 30000 | 600000 | 600 | 4,097 | 48715595824 | 576000000 |
| 30000 | 900000 | 600 | 6,734 | 48896938960 | 591612359,9 |
| 20000 | 300000 | 900 | 2,594 | 69947976239 | 617418539,9 |
| 20000 | 600000 | 900 | 5,86 | 70219266548 | 620588182,6 |
| 20000 | 900000 | 900 | 9,489 | 70490556857 | 660882273,9 |
| 30000 | 300000 | 900 | 2,68 | 1,09065E+11 | 846000000 |
| 30000 | 600000 | 900 | 6,085 | 1,09337E+11 | 887418539,9 |
| 30000 | 900000 | 900 | 9,639 | 1,09608E+11 | 930882273,9 |

\*Testes corridos num Macbook M1 Pro com 16GB de RAM